[redacted]

1) 1-~~4~~10, 152
2) 11-17, 19, A[10, 11, 13, 14]

Übungen Mathematik 2 für Elektrotechniker

Prof. Langer SS 2003

Sprechstunde: Do, 11:30-12:30 Vorzimmer v. Prof. Langer
↳ Matthias Langer

Kapitel 6

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Für welche Werte des Parameters a ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

normal?

Bsp. 3-4: Bestimmen Sie eine Dreieckszerlegung der Matrizen

3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Lsg.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 10 & 8 & 8 & 12 \\ 2 & 8 & 8 & 5 & 14 \\ -1 & -1 & 2 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

[redacted]

144, 248, 7, 52, 9, 124, 50, 51

[redacted]

Lsg.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Bsp. 5-7: Bestimmen Sie den Rang der Matrizen

5.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Lsg.: Rang 2

6.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Lsg.: Rang 3

7.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lsg.: Rang 4

8. Stellen Sie die Permutation σ der Menge $\{1,2,3,4,5\}$:

$$\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 5,\ \sigma(3) = 3,\ \sigma(4) = 1,\ \sigma(5) = 4$$

als Produkt von Vertauschungen zweier benachbarter Elemente dar.

9. Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$ nicht kommutativ ist. Ist die Gruppe $\mathcal{S}_2$ kommutativ?

10. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

[redacted]

durch Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte.

Lsg.: +25

11. Berechnen Sie die Determinante aus Bsp. 10 durch eine Dreieckszerlegung.

12. Berechnen Sie die Hauptabschnittsdeterminanten der Matrix **A** und begründen Sie ob es eine Dreieckszerlegung für **A** gibt oder nicht.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

13. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Lsg.: Det=12

14. Zeigen Sie durch Entwicklung nach der ersten Zeile, dass die Determinanten

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

die Rekursion $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$ erfüllen.

Lsg.:

$$D_n = D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1\times n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}.$$

15. Für welche n gibt es eine Dreieckszerlegung der Matrix aus Bsp. 14?

Lsg.: Wegen $D_2 = 0$ gibt es eine Dreieckszerlegung nur für $n = 1$ ($D_1 = 1$).

16. Berechnen sie die Inverse der regulären 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

über die adjungierte Matrix.

17. Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lsg.:

$$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 5 & -7 & -4 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

18. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

über die adjungierte Matrix.

Lsg.:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

19. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix aus Bsp. 18 über eine Dreieckszerlegung.

20. Berechnen Sie die Inverse der Matrix:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Lsg.:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

21. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Lsg.:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ & & \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

orthogonal ist.

23. Prüfen Sie ob die Matrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+j & 0 & -1+j \\ 0 & \sqrt{2}(1+j) & 0 \\ -1+j & 0 & 1+j \end{pmatrix}$$

unitär ist.

24. Stellen Sie den Vektor $(2,1,2)^T$ als Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrix von Bsp. 22 dar.

Bsp. 25-27: Lösen Sie die linearen Gleichungsysteme

25.

$$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & -2 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Lsg.: $(1,1,-2)$

26.

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & -7 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & -5 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -2. \end{array}$$

Lsg.: $(1, -2, 1, -3)$

27.

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = & 0 \end{array}$$

Lsg.: $(1 - t/4, 3t/4 - 1, -3t/4 + 1, t)$

28. Finden Sie für das Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung sowie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems. Beschreiben Sie damit die allgemeine Lösung des Gleichungssystems.

Lsg.: $y_p = 1/3(-8, 1, 0, 3)^T$; $y_h = t(-1, -1, 1, 1)^T$

29. An einen Stromkreis sind 4 Maschinen mit konstantem Verbrauch angeschlossen, die am 1. Tag 2, 5, 7 und 5 Stunden, am 2. Tag 3, 2, 10 und 8, am 3. Tag 5, 1, 8 und 7 und am 4. Tag 4, 5, 11 und 9 Stunden liefen. Der Gesamttagesverbrauch an diesen Tagen war jeweils 99, 86, 68 und 127 kWh. Berechnen Sie die Leistungsaufnahme der einzelnen Maschinen.

Lsg.: $(2, 11, 5, 1)$

30. Stellen Sie den Vektor $(5, 2, 8)^T$ als Linearkombination der Vektoren $(2, 1, 3)^T$, $(-1, 1, 1)^T$, $(2, -1, 1)^T$ dar.

Lsg.: Koeffizienten: 2,1,1.

31. Für welche Vektoren $\mathbf{s}$ ist das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{s}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

lösbar? Kann die Lösung eindeutig sein?

Lsg.: $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)^T$ mit $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 = 0$, wenn lösbar eindeutig

32. Für welche Werte von a, b ist ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & a & b \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2a & 1 \end{pmatrix}$$

immer lösbar?

Lsg.: $(a, b) \neq (1, 0)$

33. Für welche α hat ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

immer eine eindeutige Lösung?

Lsg.: $\alpha \neq (1 \pm \sqrt{17})/2$.

34. Für welche Werte von a hat ein Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ höchstens eine Lösung?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$$

Lsg.: $a \neq 1$

35. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & -y & -z & = & -2 \\ & 2y & +z & = & 7 \\ 2x & +2y & & = & 6 \end{array}$$

durch Invertieren der Koeffizientenmatrix.

Lsg.:

$$\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

36. Bestimmen Sie x_2 von Beispiel 26 durch die Cramersche Regel.

37. Bestimmen Sie die Maximums- Betragssummen sowie die euklidische Norm des Vektors $(2, 2, -1, 5, 3)^T$

38. Bestimmen Sie Zeilensummen und Spaltensummennorm der Matrix aus Beispiel 6.

39. Bestimmen Sie die Konditionszahl bezüglich der Zeilensummennorm der Koeffizientenmatrix aus Beispiel 35. Schätzen Sie damit den relativen Fehler ab, der auftritt, wenn die rechte Seite des Gleichungssystems durch Rundung auf ganzzahlige Werte erhalten wurde.

Lsg.: rel. Fehler 1.607

40. Geben Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler wie in Beispiel 39 unter der zusätzlichen Annahme, dass auch die Koeffizienten der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems mit Fehlern bis zu 10^{-2} behaftet sind.

Lsg.: $\alpha = 0,135$; $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq 2,014$

41. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lsg.: $0,\ 3/2 \pm j\frac{\sqrt{11}}{2}$

42. Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte der Matrix von Beispiel 21.

Lsg.: EW 1, alg. Vielf. n, geom. Vielf. 1.

Bsp. 43-45: Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen

43.
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Lsg.: EW -3; EV $c(1,1)^T$.

44.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Lsg.: EW: 0,-4,3; EW: $c(1,6,-13)^T$, $c(-1,2,1)^T$, $c(2,3,-2)^T$

45.
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Lsg.: EW: $1 \pm 2j$, EV: $c(1,1-j)^T$, $c(1,1+j)^T$

46. Ist die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
diagonalisierbar?

47. Bestimmen Sie eine Matrix $\mathbf{X}$ und eine Diagonalmatrix Λ, sodass
$$\mathbf{AX} = \mathbf{X}\Lambda$$
für die Matrix $\mathbf{A}$ aus Beispiel 44 gilt.

48. Bestimmen Sie eine Matrix $\mathbf{X}$ und eine Diagonalmatrix Λ, sodass $\mathbf{A} = \mathbf{X}\Lambda\mathbf{X}^{-1}$ für die Matrix
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 11 & 1 & -5 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$
gilt.

Lsg.:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

49. Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $\mathbf{Q}$ und eine Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$, sodass $\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt.

Lsg.:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

50. Bestimmen Sie $\mathbf{A}^n$ für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch Diagonalisierung und verifizieren Sie für diese Matrix die Gleichung von Caley–Hamilton.

51. Berechnen Sie das Matrizenpolynom $p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 - 3\mathbf{A}^3$ mit Hilfe des Minimalpolynoms für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lsg.: $m_A(z) = z^2 - 7z - 8$, $p(\mathbf{A}) = 284\mathbf{A} - 288\mathbf{E}$.

52. Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie damit

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^7 + 3\mathbf{A}^6 + 2\mathbf{A}^5 - 3\mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}.$$

Lsg.: $m_A(z) = z^2 + 3z + 2$, $p(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E})(\mathbf{A}^5 - 3\mathbf{A} + 7\mathbf{E}) - 17\mathbf{A} - 14\mathbf{E} = -17\mathbf{A} - 14\mathbf{E}$.

53. Berechnen Sie $\cos \mathbf{A}$ von Bsp. 52 durch Diagonalisierung von $\mathbf{A}$.

Lsg.:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos A = \mathbf{X}(\cos \Lambda)\mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 1 & \cos 2 - \cos 1 & \cos 1 - \cos 2 \\ 0 & \cos 2 & \cos 1 - \cos 2 \\ 0 & 0 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

54. Begründen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{4^n} \mathbf{A}^n$$

für die Matrix $\mathbf{A}$ aus Beispiel 43.

55. Berechnen Sie Spur($\sin \mathbf{A}$) für die Matrix aus Beispiel 49.

56. Untesuchen Sie die durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene quadratische Form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$ auf Definitheit.

Lsg.: indefinit

57. Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & -2 & b \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene quadratische Form semidefinit, definit bzw. indefinit?

Lsg.: Für $a^2 + b^2 < 2$ neg. definit, $a^2 + b^2 = 2$ neg. semidefinit, sonst indefinit.

58. Prüfen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums ob die Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^3 + \frac{5}{2}z^2 + 3z + 1$ negativen Realteil haben.

59. Prüfen Sie ob die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

negativen Realteil haben.

Lsg.: $-p(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 24\lambda + 20$, $\quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 20 & 24 & 9 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, EW haben neg. Realteil.

60. Prüfen Sie durch das Hurwitz-Kriterium und direkt für welche Werte des reellen Parameters c die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & c \\ c & -2 & c \\ c & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

negativen Realteil haben.

Lsg.: $|c| < \sqrt{3}$

Kapitel 7

61. Existiert der Grenzwert $(x, y) \to (0, 0)$ für die Funkton $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$?

62. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung der Funktion $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \sin z$, $y \neq 0$.

63. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2y - y + (1 + z^2)^x.$$

64. Berechnen Sie Differential und Ableitung der Funktion

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \sin x_1x_2 \\ \cos x_3 \\ \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \end{pmatrix}.$$

65. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ mit der Kettenregel und direkt durch Einsetzen: $\mathbf{g}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1x_2x_3)$ und $\mathbf{f}(y_1, y_2) = (\sin y_1, \cos y_2, y_1y_2)^T$.

66. Stellen Sie den Operator $\frac{\partial}{\partial x}$ durch Ableitungen nach Kugelkoordinaten dar: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$:

Lsg.:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

67. Stellen Sie den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ durch elliptischen Koordinaten u, v dar

$$x = \cosh u\cos v, \quad y = \sinh u\sin v, \quad 0 \le u < \infty, \quad 0 \le v \le 2\pi.$$

Lsg.:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sinh^2 u + \sin^2 v}\left((\sinh u\cos v + \cosh u\sin v)\frac{\partial}{\partial u} + (\sinh u\cos v - \cosh u\sin v)\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

68. Stellen Sie F_x und F_y durch parabolische Koordinaten η, ν dar:

$$x = \xi\eta; \qquad y = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2) \qquad 0 \le \eta < \infty, \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Lsg.:

$$F_x = \frac{1}{\eta^2 + \xi^2}(\xi f_\eta + \eta f_\xi); \qquad F_y = \frac{1}{\eta^2 + \xi^2}(\eta f_\eta - \xi f_\xi)$$

69. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Ordnung der Funktion $f(x, y) = \sin x\cos y$ mit Anschlussstelle $(0, 0, 0)$.

70. Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung der Funktion

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

mit Anschlussstelle $(0, 0, 0)$.

71. Für welche Punkte (x_0, y_0) wird durch die Gleichung

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x+y} = c$$

eine Funktion $y = f(x)$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ definiert?

Lsg.: $y \neq -1 \pm \sqrt{1 - x^2}$ für $x \in [-1, 1]$.

72. Zeigen Sie, dass durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x + y_1 + y_2 &= 2 \\ x^2 - y_1^2 - y_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung der Anfangslösung $(1,1,0)$ eine Funktion $\mathbf{y}(x)$ definiert wird und berechnen Sie $\mathbf{y}'(1)$.

Lsg.: $\mathbf{y}'(1) = (1,-2)^T$.

73. Zeigen Sie, dass durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_1(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) = (x_1^2+x_2^2)y_1 - 2x_3^2y_2^2 &= 0 \\ F_2(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) = x_1^2y_1^2 + x_1x_2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung der Anfangslösung $(1,1,1,1,-1)$ eine Funktion $\mathbf{y} = (y_1,y_2)$ von (x_1,x_2,x_3) definiert ist. Berechnen Sie die Ableitung dieser Funktion $\mathbf{y}(x_1,x_2,x_3)$ an der Stelle $(1,1,1)$.

Lsg.:

$$\mathbf{F_y} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist regulär, also def. Lsg. mit

$$\mathbf{y}'(1,1,1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

74. Für welche $c \in \mathbb{R}$ sind für die Funktion $\mathbf{y} = (y_1,y_2)$:

$$\begin{aligned} y_1(x_1,x_2) &= x_1 + c\sinh x_2 \\ y_2(x_1,x_2) &= \sinh x_1 + x_2 \end{aligned}$$

auf dem Wertebereich von $\mathbf{y}$ lokal Umkehrfunktionen $\mathbf{x}(\mathbf{y})$ definiert? Berechnen Sie für $c = 2$ die Ableitung $\mathbf{x}'(\mathbf{y})$ an der Stelle $\mathbf{y}_0 = (0,0)$.

Lsg.:

$$c \notin (0,1]; \qquad \mathbf{x}'(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bsp. 75-77: Bestimmen Sie die stationären Stellen der Funktion f und prüfen Sie welche lokale Maxima resp. Minima sind:

75. $f(x,y) = \sinh(x^2+y^2)$

76. $f(x,y) = \exp(2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 2y + 1)$

77. $f(x,y,z) = 5x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz - 4xz + 6x - 2z + 6$.

78. Bestimmen Sie Punkte mit möglichen lokalen Maxima oder Minima der Funktion
$$f(x,y) = \exp(x^2 + y^2)$$
unter der Nebenbedingung $x+y=1$ mit Hilfe der Lagrange-Parameter (d.h. ohne Elemination einer Veränderlichen durch die Nebenbedingung).

Lsg.: $x = y = 1/2$

79. Prüfen Sie welche der in Beispiel 78 gefundenen Punkte lokale Maxima und welche lokale Minima sind.

80. Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion
$$f(w,x,y,z) = w + x + y + z$$
unter den Nebenbedingungen $w^3 + w + x^3 + x = 4$ und $y^2 + z^2 = 1$ durch Lagrange-Parameter.

Lsg.: $(1,1,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $(1,1,-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$

81. Prüfen Sie welche der in Beispiel 80 gefundenen Punkte lokale Maxima und welche lokale Minima sind.

Lsg.: Lok. Maximum bei $(1,1,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, kein lok. Extrtemum bei $(1,1,-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$.

82. Für eine Berechnung seien 3 Programmschritte erforderlich, deren Fehler f_i sich addieren. Wie sollen die Rechenzeiten x_i zwischen den Programmschritten aufgeteilt werden, wenn der Gesamtrechenfehler minimiert und die Rechenzeit 1 betragen soll? Für die Rechenfehler f_i gelte in Abhängigkeit von der Rechenzeit x_i:
$$f_1(x_1) = 1/x_1, \qquad f_2(x_2) = 4/x_2, \qquad f_3(x_3) = -\ln x_3.$$

83. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion
$$F(x) = \int_{2x}^{1+x^2} \frac{\sin tx}{t}\, dt.$$

84. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{1+xt^2}}{t}\, dt$$

Lsg.: $\frac{5}{2x}\sqrt{1+x^5} - \frac{3}{2x}\sqrt{1+x^3}$

85. Berechnen Sie die Funktion

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-cy}\frac{\sin(yx)}{y}\, dy, \qquad c > 0$$

durch Differentiation nach x.

Lsg.: $F(x) = \arctan \frac{x}{c}$

86. Berechnen Sie

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{t} e^{-t}\, dt, \qquad x > -1$$

durch Differentiation nach x.

Lsg.: $F(x) = \ln(1+x)$

87. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_B x^2 - y\, dxdy$$

über den von der Geraden $y = 0$ und der Parabel $y = x^2 - x$ begrenzten Bereich B der Ebene.

88. Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_\Delta |x| + |y| + |z|\, dxdydz$$

über die Pyramide Δ mit den Eckpunkten $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$, $(-1,1,0)$, $(-1,-1,0)$, $(0,0,1)$.

Lsg.: 4/3

89. Berechnen Sie durch Transformation auf Kugelkoordinaten

$$\iiint_K x + x^2 \, dxdydz$$

wobei K die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt (0,0,0) bezeichnet.

Lsg.: $\frac{4}{15}\pi$

90. Berechnen Sie

$$\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)} \, dxdy$$

für den durch die Parabeln $y + \sqrt{x^2+y^2} = 1$ und $y + \sqrt{x^2+y^2} = 2$ beschränkten Bereich B durch Transformation auf parabolische Koordinaten (siehe Bsp. 68).

Lsg.: $I = 4\int_1^{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\eta d\xi}{\eta^2+\xi^2} = 2\pi \ln 2$

Kapitel 8

Bsp. 91-96: Lösen Sie die Differentialgleichungen

91.

$$y' = y \cos x.$$

92.

$$y' = (x^2+1)(y^2+1)$$

93.

$$y' = \frac{2x+y+1}{1-x}$$

94.

$$y' = -\frac{1 + y \cos xy}{x \cos xy}$$

Lsg.: $x + \sin xy = c$

95.

$$y' = \frac{e^{x+y}}{(x+y)^2} - 1 \qquad \text{(Variablensubstitution)}$$

Lsg.: $e^{-(x+y)}(x^2+y^2+2xy+2x+2y+2) + x = c$

96.

$$y' = \frac{\sqrt{(x+y^2)^3} - 1}{2y}$$

Lsg.: $y = \pm\sqrt{\frac{4}{(x-c)^2} - x}$

97. Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $k(x)$ zum lösen der DG:

$$y' = -\frac{2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy + y^2}{x^2 + 2xy}$$

Lsg.: $e^{x^2}(x^2y + xy^2) = c$ oder explizit.

98. Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $k(x+y)$ zum lösen der DG:

$$y' = -\frac{4xy + y^2}{4xy + x^2}$$

Lsg.: $(x+y)^3xy = c$

Bsp. 99-100: Bestimmen Sie das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung:

99.

$$y' + xy = x$$

Lsg.: $y = ce^{-x^2/2} + 1$

100.

$$y' \sin x - y \cos x = \sin^3 x$$

Lsg.: $y = k \sin x - \cos x \sin x$

101. Finden Sie über den Reduktionsansatz zur Lösung $y_1(x) = x^2$ eine zweite Lösung der Differentialgleichung

$$y''x^2 - 2y = 0.$$

Lsg.: $y_2 = 1/x$

102. Bestimmen Sie durch Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (vgl. Bsp. 101)

$$y''x^2 - 2y = 3x^3e^x.$$

Lsg.: $y_p = e^x\left(3x - 6 + \frac{6}{x}\right)$

103. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$2x^2y'' - 13xy' + 25y = 0$$

mit Hilfe der Lösung $y_1 = x^5$.

Lsg.: $y_2 = x^{5/2}$

104. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2x^2y'' - 13xy' + 25y = \frac{1}{x}$$

(vgl. Bsp. 103).

Lsg.: $y = c_1x^5 + c_2x^{5/2} + \frac{1}{42x}$

105. Finden Sie über den Reduktionsansatz zur Lösung $y_1(x) = x^2$ eine zweite Lösung der Differentialgleichung

$$(x^3 - x)y'' - (2x^4 + x^2 - 1)y' + 4x^3y = 0.$$

(Hinweis: $2\int e^{x^2}\frac{x^2-1}{x^3}\,dx = \frac{e^{x^2}}{x^2} + c$)

Lsg.: $\frac{z'}{z} = 2x + \frac{3-x^2}{x^3-x}$; $y_2 = \frac{e^{x^2}}{2}$

Bsp. 106-109: Finden Sie die allg. Lösung der Differentialgleichung

106.

$$y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$$

Lsg.: $y = e^{2x} + c_1e^x + c_2e^{-2x}$

107.

$$y^{(2)} + y = \sin x$$

Lsg.: $y = a\sin x + b\cos x - \frac{x}{2}\cos x$

108.

$$y^{(4)} + y^{(3)} - 2y^{(2)} = x + e^{3x}$$

Lsg.: $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{x} + \frac{1}{90} e^{3x} - \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{12} x^3$

109.

$$2y'' - 4y' - 30y = (x+2)e^{5x}$$

Lsg.: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{5x} + \left(\frac{1}{32} x^2 + \frac{15x}{128}\right) e^{5x}$

110. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung von Bsp. 106 auf dem Intervall $[0, 1]$ unter den Randbedingungen

$$y(0) = 1, \qquad y(1) + y'(1) = 1.$$

Lsg.: $y = e^{2x} + \frac{1-3e^2}{2e+e^{-2}} e^{x} - \frac{1-3e^2}{2e+e^{-2}} e^{-2x}$

111. Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} \dot{x} & = & x & + & 3y & - & 3z \\ \dot{y} & = & 11x & + & y & - & 5z \\ \dot{z} & = & 8x & + & 0y & - & 4z \end{array}$$

(vgl. Bsp. 48).

Lsg.:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} - e^{4t} & e^{-2t} - e^{4t} & -e^{-2t} + e^{4t} \\ -3e^{-2t} + 5e^{-4t} 2e^{4t} & 3e^{-2t} - 3e^{-4t} - 2e^{4t} & -3e^{-2t} + e^{-4t} + 2e^{4t} \\ -4e^{-2t} + 5e^{-4t} - e^{4t} & 4e^{-2t} - 3e^{-4t} - e^{4t} & -4e^{-2t} + e^{-4t} + e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

112. Lösen Sie das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} \dot{x} & = & x & + & 2y & & \\ \dot{y} & = & 2x & + & y & + & e^{3t} \end{array}$$

Lsg.: Integralbasis des homogenen Syst.: $\mathbf{x} = (e^{3t} + e^{-t}, e^{3t} - e^{-t})^T, \mathbf{y} = (e^{3t} - e^{-t}, e^{3t} + e^{-t})^T$, allgem Lösung $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$,

$$\mathbf{x}_p = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{4t} + 4t \\ e^{4t} + 4t \end{pmatrix}$$

113. Bestimmen Sie eine Integralbasis des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= y + z \\ \dot{z} &= z. \end{aligned}$$

Lsg.: $e^t(1,0,0)^T, e^t(t,1,0)^T, e^t(t^2/2,t,1)^T$.

114. Bestimmen Sie einen Näherungswert für e durch eine näherungweise Lösung der Differentialgleichung $y' = y, \quad y(0) = 1$ mit dem Eulerverfahren (Schrittweite 1/4).

Lsg.: $(5/4)^4$

Kapitel 9

115. Was ist wahrscheinlicher: 3 von 6 unterschiedlichen Objekten zu erraten oder 2 von 7?

Bsp. 116-119: Berechnen Sie über die bedingte Erwartung:

116. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei 5 Würfen mit einem Würfel nie die 2 zu bekommen unter der Annahme, dass keine 2 aufeinanderfolgenden Würfe die gleiche Augenzahl haben?

Lsg.: 0,341

117. 5 Steine werden zufällig auf ein Schachbrett(8x8 Felder) gesetzt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 Steine am Rand des Brettes liegen?

118. Auf einem Schachbrett werden 5 Steine zufällig aufgestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 auf schwarzen Feldern stehen unter der Annahme, dass kein Stein auf ein schwarzes Feld der unteren Bretthälfte gesetzt wurde?

Lsg.: $\frac{\binom{16}{3}\binom{32}{2}}{\binom{48}{5}}$

119. An einem einarmigen Banditen (5 Walzen mit je 5 Symbolen werden zum Stillstand gebracht, sodass eine zufällige Folge mit mögl. Wiederholung der Symbole entsteht) wird wie folgt gespielt: Sind keine zwei

Symbole gleich ist das Spiel unentschieden und es wird erneut gespielt. Anderenfalls hat der Spieler gewonnen wenn mindestens 4 Symbole gleich sind und verloren wenn keine 4 gleichen Symbole auftreten. Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit.

(Hinweis: Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von mindestens 2 gleichen Symbolen über die Komplementärwahrscheinlichkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass keine zwei gleich sind.)

Lsg.: 21/601

120. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei 20 Würfen eines Würfels mindestens 3 mal die 6 zu bekommen?

121. In einem leicht radioaktiven Körper zerfallen im Mittel 2 Atome pro Sekunde. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Sekunde genau 3 zerfallen.

(Hinweis: Poisson-Verteilung warum?)

Lsg.: 0,180

122. Auf einem Planeten schlagen in 100 Jahren durchschnittlich 5 Meteoriten ein, die alles Leben zerstören. Berechnen Sie Ihre Wahrscheinlichkeit auf diesem Planeten 50 Jahre alt zu werden.

Lsg.: $e^{-2,5}$

123. In einem Büro läutet durchschnittlich alle 20 Minuten das Telefon. In welchem Zeitintervall ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau 3 mal läutet genau 5 mal so gross wie die Wahrscheinlichkeit, dass es 5 mal läutet? Gehen Sie davon aus, dass die einzelnen Anrufe voneinander unabhängig sind.

(Hinweis: Berechnen Sie den Parameter der Poissonverteilung und vergleichen Sie mit dem Erwartungswert der Zufallsgröße.)

124. Berechnen Sie die p-Quantil der Exponentialverteilung mit Parameter α.

Lsg.: $x_p = -\frac{\ln(1-p)}{\alpha}$

125. Bestimmen sie einen Näherungswert mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerintegrals dafür, dass bei 10000-maligem würfeln mindestens 1500 mal die 1 gewürfelt wird.

Lsg.: $P(X \geq 1500) \approx \Psi(-4,472) = 1 - \Phi(-4,472) \approx 1$

126. Messwerte seien durch äußere zufällige Einflüsse $N(\mu, 10^{-1})$-verteilt, wobei μ der tatsächliche Wert der zu messenden Größe ist. Wie oft muß man messen, um für das Mittel der Messwerte eine Streuung kleiner 10^{-3} zu erhalten?

127. Finden Sie mit der Tschebyscheffschen Ungleichung eine Abschätzung dafür, dass eine $N(3, 4)$-verteilte Zufallsgröße um mehr als 10 von ihrem Mittelwert abweicht.

128. Berechnen Sie die Kovarianz und den Korellationskoeffizienten der Zufallsgrößen X_1 und $X_1 + X_2$ wenn X_1 und X_2 auf $[0, 1]$ gleichverteilt sind (Rechtecksverteilung).

129. Zeigen Sie, ist X N(0,1)-verteilt, so ist X^2 χ^2-verteilt mit einem Freiheitsgrad.

Kapitel 10

130. Bestimmen Sie den Schätzwert für Mittel und Varianz einer Stichprobe mit Werten 13, 10, 3 ,14, 10.

131. Eine Zufallsgröße sei exponentialverteilt mit Parameter α. Schätzen Sie α mit der Maximum–Likelihood Mehode und der Stichprobe 1.2, 0.8, 0.1, 1.4, 0.5.

Lsg.: $\alpha = 1.25$

132. Bestimmen Sie durch die Stichprobe -3.5, -4.8, 0.3, -2.2, ,-1.3 ein Konfidenzintervall für den Mittelwert μ einer $N(\mu, 4)$-verteilten Zufallsgröße mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05. ($\Phi(1.96) = 0.975$).

Lsg.: $[-4.053, -0.547]$

133. Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 für den Mittelwert μ einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsgröße zur Stichprobe von Bsp. 132.

Tabelle zur t-Verteilung $t_{f,1-\alpha/2}$:

f	$\alpha =$ 0,5	0,25	0,1	0,05	0,02	0,01
1	1,00	2,41	6,31	12,7	31,8	63,7
2	0,816	1,60	2,92	4,30	6,97	9,92
3	0,765	1,42	2,35	3,18	4,54	5,84
4	0,741	1,34	2,13	2,78	3,75	4,60
5	0,727	1,30	2,01	2,57	3,37	4,03
6	0,718	1,27	1,94	2,45	3,14	3,71
7	0,711	1,25	1,89	2,36	3,00	3,50
8	0,706	1,24	1,86	2,31	2,90	3,36
9	0,703	1,23	1,83	2,26	2,82	3,25
10	0,700	1,22	1,81	2,23	2,76	3,17

Lsg.: $[-4.74, 0.14]$

134. Bestimmen Sie Konfidenzintervalle für σ einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsgröße zur Stichprobe von Bsp. 132 mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0,1.

Tabelle zur χ^2-Verteilung $\chi^2_{f,\alpha}$:

f	$\alpha =$ 0,05	0,1	0,3	0,5	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
1	.004	.016	.148	.455	1.64	2.71	3.84	6.62	10.8
2	.103	.211	.713	1.39	3.21	4.61	5.99	9.21	13.8
3	.352	.584	1.42	2.37	4.64	6.25	7.81	11.3	16.3
4	.711	1.06	2.19	3.36	5.98	7.78	9.49	13.3	18.5
5	1.15	1.61	3.00	4.35	7.28	9.24	11.1	15.1	20.5

Lsg.: $[1.63, 21.74]$

135. In einem Betrieb laufen 5 Maschinen je 200, 140, 250, 100, 110 Stunden. Dabei kommt es zu je 8, 4, 1, 2, 1 Störfällen. Testen Sie die Hypothese, dass diese Maschinen gleich zuverlässig sind mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 20%.

Lsg.: $\chi^2 = 8.37 > 5.98$ also Hypothese verwefen

136. 6 Spieler spielen mit Einsätzen von je 1, 2, 2, 3, 3, 5 Euro pro Spiel. Sie gewannen je 1, 8, 7, 7, 10, 15 mal. Prüfen Sie die Hypothese, dass

die Gewinnwahrscheinlichkeit proportional zum Einsatz ist durch einen χ^2-Test mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0.1.

Lsg.: $\chi^2 = 2.72 < 9.24$ also kein Einwand

137. Bestimmen Sie die Regressionsgerade zu den Messpunkten

i	x_i	y_i
1	0	1.1
2	1	3.3
3	2	4.8
4	3	6.7