n. B.

A1 – A5 O.K.

1. Übungsblatt Mathematik 1 für ET
WS 2002/2003

Prof. Simeonov

Bereiten Sie für die erste Übungsstunde die Bsp.A1 – A6 vor!

A1. (a) Finde eine 2–stellige Zahl, die gleich der Summe aus der Zahl ihrer Zehnerziffer und dem Quadrat der Zahl an der Einerstelle ist. 89

(b) Zeige: Vertauscht man in einer dreiziffrigen Zahl die Hunderterziffer mit der Einerziffer, so ist die Differenz dieser beiden Zahlen durch 99 teilbar.

A2. Es sei x eine beliebige positive ($\mathbb{R}^+$) reelle Zahl. Zeige, dass die Ungleichung

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

S. 13

erfüllt ist. Für welche Werte von x besteht Gleichheit?

A3. Löse die folgenden Gleichungen in $\mathbb{R}$:

(a)

$$\frac{x-1}{2x-6} - \frac{x^2-1}{2x^2-18} = \frac{6x+11}{6x^2+18x}$$

(b)

$$1 - \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x^2-x}$$

A4. Bestimme jeweils in $\mathbb{R}$ die Lösungsmenge für die folgenden Gleichungen:

(a)

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{x+5} = 7$$

(b)

S. 15

$$x(|x|-1) = x^2 - 1$$

A5. (a) Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = 2^{x+1}(x^2+x-2) - 2^{x+3}(1-\frac{x^2}{4})$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $2^{x+1}(x^2+x-2) \leq 2^{x+3}(1-\frac{x^2}{4})$?

A6. Zeige:

(a) Ist die natürliche Zahl n ungerade, so ist n^2-1 durch 8 teilbar. (vollständige Induktion)

(b) $\mathrm{GGT}(a,b) = a \quad \Rightarrow \quad \mathrm{KGV}(a,b) = b$

A1a)

$$L = \{89\}$$

$$8 + 9^2 = 89 \quad \text{w.A.}$$

$$10a + b = a + b^2$$

$$9a + b = b^2$$

$$a = \frac{b^2 - b}{9} \qquad \text{bei } b = 9$$

$$a = 8 \qquad a \in \mathbb{N}, \quad b \in \mathbb{N}$$

A1b)

$$(100a + \cancel{10b} + c) - (100c + \cancel{10b} + a) = 99x$$

$$99a - 99c = 99x$$

$$\frac{\cancel{99}(a-c)}{\cancel{99}} = x$$

$$(a-c) = x$$

wenn $a \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{N}$ dann folgt $x \in \mathbb{N}$

1 Mathe UE

A2 für Gleichheit

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$x^2 + 1 = 2x$$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a = -1;\ b = 2;\ c = -1$$

$$x^2 + px + q = 0 \qquad p = \frac{b}{a} = -\frac{2}{1}$$

$$q = \frac{c}{a} = \frac{+1}{+1}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 1} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{0} = 1 = x_{1,2}$$

Fallunterscheidung

$x > 0$	$x < 0$
$x^2 + 1 \geq 2x$	$x^2 + 1 \leq 2x$
$x^2 - 2x + 1 \geq 0$	$x^2 - 2x + 1 \leq 0$
$(x-1)^2 \geq 0$	$(x^2 - 1)^2 \leq 0$
w. A. $\longrightarrow$	↳ nicht erfüllbar!
	weil wenn $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$

Mathe UE

1 Übung

A3a)

$$\frac{x-1}{2x-6} - \frac{x^2-1}{2x^2-18} = \frac{6x+11}{6x^2+18x}$$

$$\frac{(2x^3-18x-\cancel{2x^2}+18)-(\cancel{2x^3}-2x-\cancel{6x^2}+6)}{(2x-6)(2x^2-18)} = \frac{6x+11}{6x^2+18x}$$

$$\frac{4x^2-16x+12}{2(x-3)\,2(x^2-9)} = \frac{6x+11}{6x^2+18x}$$

$$\frac{\cancel{4}(x^2-4x+3)}{\cancel{2}(x-3)\cancel{2}(x^2-9)} = \frac{6x+11}{6x(x+3)}$$

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{(x-3)}(x-3)(x+3)} = \frac{6x+11}{6x(x+3)} \quad \Big|\cdot N$$

$$(x-1)\,6x\,\cancel{(x+3)} = (6x+11)(x-3)\cancel{(x+3)}$$

$$\cancel{6x^2}-6x = \cancel{6x^2}-18x+11x-33$$

$$x = -33$$

✓

1. Mathe UE

A3b)

$$1-\frac{2}{x} = \frac{x+2}{x^2-x} \qquad x \neq 0 \quad x \neq 1$$

$$1-\frac{2}{x} = \frac{x+2}{x(x-1)} \quad \Big| \cdot x(x-1)$$

$$x(x-1) - \frac{2x(x-1)}{x} = x+2$$

$$x(x-1) - 2(x-1) = x+2$$

$$(x-1)(x-2) = (x+2)$$

$$x^2-2x-x+2 = x+2$$

$$x^2-4x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x-4) = 0$$

<u>Normalform quadratischer Gleichungen:</u> ↳ $x = 4$ weil $x = 0$ ausgeschlossen

$$x^2+px+q = 0$$

$$p = \frac{b}{a} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$q = \frac{c}{a} = \frac{0}{1} = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$$

$$\underline{\underline{x_1}} = -\frac{-4}{2} + \sqrt{4} = \underline{\underline{4}}$$

weil Diskriminante $D > 4$ folgt 2 Reelle Lösungen

$$\underline{\underline{x_2}} = +2 - \sqrt{4} = \underline{\underline{0}}$$

A4a)

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{x+5} = 7$$

$$\sqrt{x-2} = 7 + \sqrt{x+5}$$

$$\cancel{x} - 2 = 14 \cdot \sqrt{x+5} + \cancel{x} + 54$$

$$-56 = 14 \cdot \sqrt{x+5}$$

$$-4 = \sqrt{x+5}$$

$$16 = x+5$$

$$x = 11$$

$$\sqrt{11-2} - \sqrt{11+5} = 7$$

$$\sqrt{9} - \sqrt{16} = 7$$

$$3 - 4 = 7 \quad f.A$$

$$L = \{ x \in R \mid \quad \}$$

A4 b)

$x(|x|-1) = x^2 - 1$ $x \neq 0$

Fallunterscheidung

$|x| > 0$

$x(x-1) = x^2 - 1$

$\cancel{x^2} - x = \cancel{x^2} - 1$

$x = 1$

$|x| < 0$

$x(-x-1) = x^2 - 1$

$-x^2 - x = x^2 - 1$

$\underset{a}{-2x^2} \underset{b}{- x} \underset{c}{+ 1} = 0$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$p = \frac{b}{a} = \frac{-1}{-2} = 0{,}5$

$q = \frac{c}{a} = \frac{1}{-2} = -0{,}5$

$x = -\frac{0{,}5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0{,}5}{2}\right)^2 + 0{,}5}$

$x_1 = 0{,}5$ wiederspricht $x < 0$

$x_2 = -1$

$L = \{x \in \mathbb{R} \mid 1, -1\}$

1. Mathe UE

A5a)

Nullstellen? für

$$f_{(x)} = 2^{x+1}(x^2+x-2) - 2^{x+3}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$f_{(x)} = 0$$

$$2^x \cdot 2^1 (x^2+x-2) - 2^x \cdot 2^3 \left(1-\frac{x^2}{4}\right) = 0$$

$$\cancel{2^x} \cdot \cancel{2^1}(x^2+x-2) = \cancel{2^x} \cdot \cancel{8}^{4}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$(x^2+x-2) = 4-x^2$$

$$(x-1)\cancel{(x+2)} = -(x-2)\cancel{(x+2)}$$

$$2x = 3$$

$$\underline{\underline{x}} = \frac{3}{2} = \underline{\underline{1{,}5}}$$

$$\rightarrow \quad 2x^2 + x - 6 = 0$$

$a = 2$ $\quad p = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $\quad x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

$b = 1$

$c = -6$ $\quad q = \frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3$ $\quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (0{,}25)^2 + 3 =$

$= 3{,}0625$

$D > 0 \rightarrow$ 2 reelle Lösungen

$$\underline{\underline{x_1}} = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} = -\frac{0{,}5}{2} + \sqrt{D} =$$

$$= \underline{\underline{1{,}5}}$$

$$\underline{\underline{x_2}} = -0{,}25 - \sqrt{D} = \underline{\underline{-2}}$$

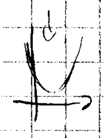
A5b)

$$2^{x+1}(x^2+x-2) \leq 2^{x+3}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$2^x \cdot \cancel{2}\,(x^2+x-2) \leq 2^x \cdot \cancel{8}^{\,4}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$x^2+x-2 \leq 4-x^2$$

$x > 0$



$$\Leftrightarrow$$

$$2x^2+x-6 \leq 0$$

$$(x+2)(2x-3) \leq 0$$

$$(x+2)\cdot 2(x-1{,}5) \leq 0$$ → diese Bedingung kann nur bei unterschiedlichen Vorzeichen der Faktoren erfüllt werden

$x+2 \geq 0 \qquad x-1{,}5 \leq 0$

$x \geq -2 \qquad x \leq 1{,}5 \quad \rightarrow \quad -2 \leq x \leq 1{,}5$

$x+2 \leq 0 \qquad x-1{,}5 \geq 0$

$x \leq -2 \qquad x \geq 1{,}5$ → ist nicht erfüllbar

daher

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1{,}5\}$$

A6 a) n ungerade Zahl

$$n^2 - 1 = 8x$$

$$(2k+1)^2 - 1 = 8x \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$4k^2 + 2k + 2k + 1 - 1 = 8x \qquad x \in \mathbb{N}$$

$$4k^2 + 4k = 8x$$

$$\cancel{4}k(k+1) = \cancel{8}^{2}x$$

$$\frac{k(k+1)}{2} = x$$

Annahme: für $k \in \mathbb{N}$ gilt $k \cdot (k+1)$ ist eine gerade Zahl.

Induktionsannahme: d. h. $k(k+1)$ sei eine gerade Zahl

$1 \cdot (1+1) = 2$ w.A

Induktionsschluss

$$(k+1)(k+1+1) =$$

$$= (k+1)(k+2) = \overbrace{k(k+1)}^{2x} + 2(k+1) =$$

$$= 2x + 2(k+1) = 2(x+k+1)$$

also ist 2 ein Teiler von $(k+1)(k+1+1)$ und damit ist $(k+1)(k+1+1)$ gerade!

q.e.d.

A6 b)

$$\mathrm{GgT}(a,b) = a \Rightarrow a \mid b \Rightarrow b = k \cdot a \Rightarrow$$

$$\mathrm{kgV}(a,b) = b$$