

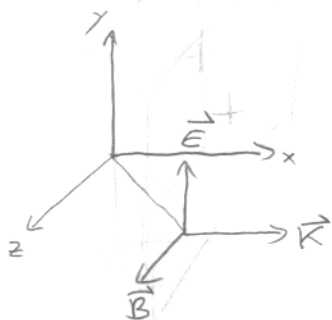
# KAP. 27: ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

Ebene (homogene) Wellen

x Strom- & ladungsfreier räuml. Bereich  
 x lineares, homogenes isotropes Medium

Zeitfunktion  $g(\tau)$  :  $\vec{E} = \hat{E} g(\tau) \vec{e}_y$  ,  $\vec{B} = \hat{B} g(\tau) \vec{e}_z$   
 ↳ Wellenprofil; mit  $\tau = t - \frac{x}{c}$

Ausbreitungsrichtung:  $\vec{E} = \hat{E} \cdot g(t - \frac{x}{c}) \vec{e}_y$   
 $\vec{B} = \hat{B} \cdot g(t - \frac{x}{c}) \vec{e}_z$



Rechtssystem:  $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$

Ausbreitungsbed. (Materialgleichung):

$$\vec{E} = c \cdot \vec{B} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \quad \mu \epsilon c^2 = 1$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = c \cdot \vec{B} = \vec{z} \cdot \vec{H}$$

$z \dots$  Wellenimpedanz  $z$   
 $z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

Sinuswellen (zeitliche & räuml. Periodizität)

$\lambda = c \cdot T$   $k \dots$  Kreiswellenzahl  
 $\tau = t - \frac{x}{c}$   $\sigma = \frac{1}{\lambda}$   
 $c = \frac{\omega}{k}$

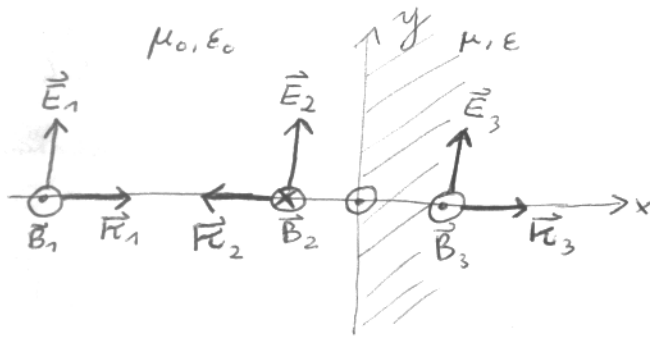
$g(\tau) = \cos(\omega \tau + \varphi)$

$\vec{E} = \hat{E} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$   
 $\vec{B} = \hat{B} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_z$

reelle Standardform:  $\vec{E} = \hat{E} \cos(\omega t - k \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \vec{e}_p$   
 $\vec{B} = \hat{B} \cos(\omega t - k \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \vec{k} \times \vec{e}_p$   
 $\hat{E} = c \cdot \hat{B} \quad \omega = c \cdot k$   
 $\vec{e}_p \dots$  Polarisationsrichtung

komplexe Standardform:  $\underline{\vec{E}} = \hat{E} e^{j(\omega t - k \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{e}_p$   
 $\underline{\vec{B}} = \hat{B} e^{j(\omega t - k \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{k} \times \vec{e}_p$   
 $\underline{\hat{E}} = c \cdot \underline{\hat{B}} \quad \omega = c \cdot k$   
 mit:  $\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}})$  ,  $\underline{\hat{E}} = \hat{E} e^{j\varphi}$   
 $\vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}})$  ,  $\underline{\hat{B}} = \hat{B} e^{j\varphi}$

## 27.2. Reflexion und Transmission



- \* Randbedingungen sind bei Reflexion im allg. gestört.
- \* vorlaufende Welle hat  $(A - \frac{x}{c_0})$ , rücklaufende hat  $(A + \frac{x}{c_0})$
- \* jede elektrische Welle ist von einer magnet. Welle begleitet

$$\vec{E}_1 = \hat{E}_1 g_1(A - \frac{x}{c_0}) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_2 = \hat{E}_2 g_2(A + \frac{x}{c_0}) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_3 = \hat{E}_3 g_3(A - \frac{x}{c}) \vec{e}_y$$

$c$ ! da die Welle nicht mehr im leeren Raum ist.

betrachte System f.  $x=0$ : Sprungbed. erfüllt:  $[[\vec{E}_t]] = 0$

rechte Terme fallen weg  $\rightarrow$  Wellenprofile sind gleich

$$\textcircled{I} \Rightarrow \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \hat{E}_3$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\hat{E}_1}{c_0} \cdot g_1(A - \frac{x}{c_0}) \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_z}$$

$$\vec{H}_1 = \frac{\hat{B}_1}{\mu_0} \dots = \frac{\hat{E}_1}{\mu_0 c_0} g_1(A - \frac{x}{c_0}) \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\hat{E}_2}{c_0} \cdot g_2(A + \frac{x}{c_0}) \underbrace{(-\vec{e}_x \times \vec{e}_y)}_{(-\vec{e}_z)}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{K} \times \vec{E}}{c}$$

Tangentialkomponente d. magnet. Feldstärke darf nicht springen:

$$[[\vec{H}_t]] = 0$$

$$\textcircled{II} \frac{\hat{E}_1}{\mu_0 c_0} - \frac{\hat{E}_2}{\mu_0 c_0} = \frac{\hat{E}_3}{\mu c}$$

Gleichungssystem lösen  $\rightarrow$  Ergebnis

# Wellenarten

Transversal-elekt. Wellen

Transversal-magnet. Wellen

Transversal-elekt.-mag. Wellen

↳ beide Komponenten,  
transversale Richtung

TE } nur bei hohen Frequenzen möglich

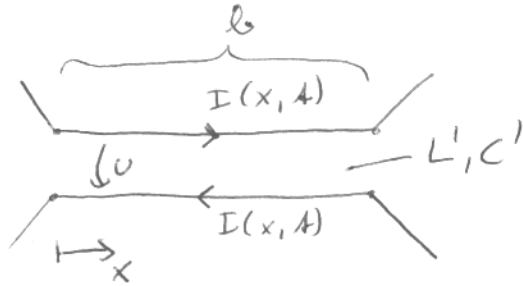
TM

TEM

Koax, parallele Drähte, ... ideale metallische Randbed.

$$[\vec{E}_e] = 0, [\vec{B}_n] = 0$$

⇒ kein Feld im Leiter, Zwischenraum perfekt  
isolierend (Ladgs- & Stromfreiheit)



$$c = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad , \quad Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Leitungsgleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + L' \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial I}{\partial x} + C' \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

allg. Lösung

$$U(x, t) = \hat{U}_1 g_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + \hat{U}_2 g_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$I(x, t) = \hat{I}_1 g_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + \hat{I}_2 g_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$\hat{U}_1 = Z_w \hat{I}_1 \quad ; \quad \hat{U}_2 = -Z_w \hat{I}_2$$

Reflexionsfaktor:

$$\kappa_A = \frac{R_A - Z_w}{R_A + Z_w}$$

$$\kappa_E = \frac{R_E - Z_w}{R_E + Z_w}$$

## 27.4. Wellenimpedanz

$$C = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} \quad Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = C \cdot L' = \frac{1}{C' C}$$

bei diesen Konfigurationen sollte ich  $C'$  oder  $L'$  wissen ( $\rightarrow$  GET 1)

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{D}{a}\right)} \quad C = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{Koax}$$

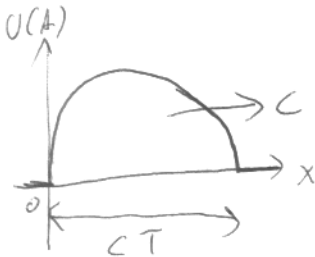
$$Z_w = \frac{1}{C C'} = \frac{\ln\left(\frac{D}{a}\right) \sqrt{\mu\epsilon}}{2\pi\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{\ln \frac{D}{a}}{2\pi} = 138 \Omega \quad [D=10a]$$

Bandleitung:  $C' = \epsilon \cdot \frac{b}{a} \rightarrow Z_w = 38 \Omega$

2-Draht-Leitung:  $C' = \frac{\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{2D}{a}\right)}$

⚠ Umformungen merken,  $C'$  oder  $L'$  merken

## 27.5. Stromverlauf in Abschlusswiderstand



$$U_1 = \hat{U}_1 g\left(A - \frac{x}{c}\right)$$

$$g(A) = \begin{cases} 0 & A < 0 \\ \sin\left(\frac{\pi A}{T}\right) & 0 \leq A \leq T \\ 0 & A > T \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\omega A}{c}\right) \rightarrow 2\pi f A = \frac{2\pi A}{T}$$

⚠ Doppelter Weg der nur Sinuswelle

$$K_A = \frac{R_A - Z_w}{R_A + Z_w} \Rightarrow U_2 = \hat{U}_1 K_A \cdot g\left(A + \frac{x}{c}\right)$$

ACHTUNG! muss schauen wo ich die Ortszählung beginne damit die Wellenprofile möglichst einfach werden.

lege fest:  $x=0$  ist im Abschlusswiderstand:

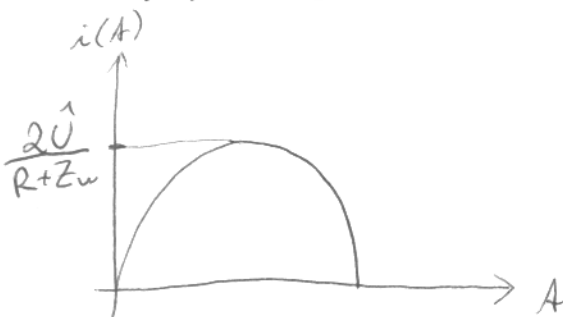
$$U(x, A) = U_1(x=0) + U_2(x=0)$$

$$= \hat{U}_1 g(A) + K_A \hat{U}_1 g(A)$$

$$= \left(\frac{R - Z_w}{R + Z_w} + 1\right) \hat{U}_1 g(A)$$

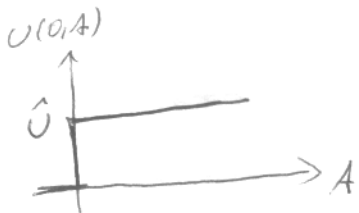
$$= \frac{2R}{R + Z_w} \hat{U}_1 g(A) = i(A) \cdot R \rightarrow i(A) = \frac{2\hat{U}_1}{R + Z_w} \cdot g(A)$$

$Z_w$  auf 1 bringen und kürzen



# 27.6. Sprungwellen

ges.: Spannungsverteilung entlang Leitungen



$$g(A) = \begin{cases} 0 & A < 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases} \quad r_A = \frac{R - Z_w}{R + Z_w} \approx +1$$

Leerlauf  $\Rightarrow R_A \rightarrow \infty \quad \frac{\infty}{\infty} = 1$

$R_E = 0 \Rightarrow r_E = -1$

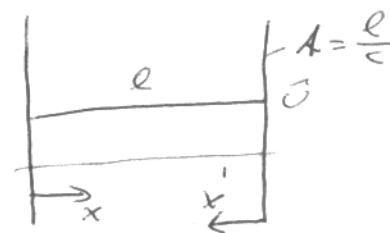
lege Spannungszentrum an bipol.  $x = l$  ... Ende der Leitung

$0 < A < \frac{l}{c}$ : nur hinlaufende Welle:  
 $U(x, A) = \hat{U} \cdot g(A - \frac{x}{c})$

$\frac{l}{c} < A < \frac{2l}{c}$ :  $g(A' - \frac{x'}{c}) = g(A - \frac{l}{c} - \frac{l-x}{c}) = g(A + \frac{x-2l}{c})$

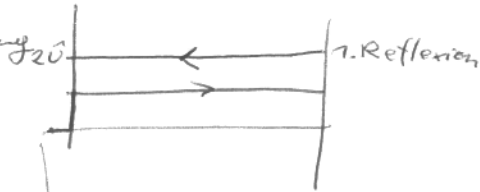
$A' = A - \frac{l}{c}$   
 $x' = l - x$

$U(x, A) = \hat{U} [g(A - \frac{x}{c}) + g(A + \frac{x}{c} - \frac{2l}{c})]$



$\hat{U}_2 = r_A \hat{U}_1 = \hat{U}_1$  da  $r_A = 1$

$\hat{U} = 2\hat{U}_1$ ,  $\hat{U}_1$  ... am Ausgang anliegende Spannung



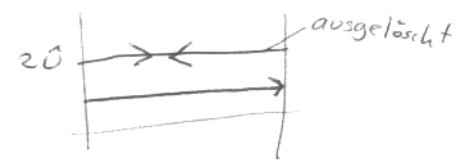
$\frac{2l}{c} < A < \frac{3l}{c}$ :  $g(A'' - \frac{x}{c}) = g(A - \frac{2l}{c} - \frac{x}{c})$

$A'' = A - \frac{2l}{c}$

$\hat{U}_3 = r_E \hat{U}_2 = -\hat{U}_1$

$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 = \hat{U}_1 + \hat{U}_1 - \hat{U}_1 = \hat{U}_1$

negativ laufende Welle mit pos. Amplitude frisst Teilwelle auf.



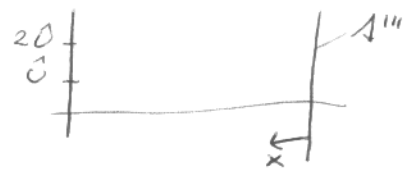
$\frac{3l}{c} < A < \frac{4l}{c}$ :  $g(A''' - \frac{x}{c}) = g(A - \frac{3l}{c} - \frac{l-x}{c})$

$A''' = A - \frac{3l}{c}$ ,  $x' = l - x$

$\hat{U}_4 = r_A \hat{U}_3 = -\hat{U}_1$

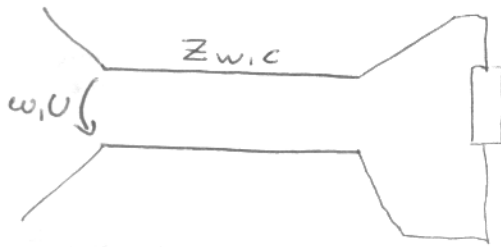
$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 + \hat{U}_4 = \hat{U}_1 + \hat{U}_1 - \hat{U}_1 - \hat{U}_1 = 0$

$\hat{U}_4$  frisst 1. Wellenteil auf,  $\rightarrow$  alles ausgelöscht. mit  $\hat{U}_5$  beginnt der Spaß wieder von vorne.



$A - \frac{l}{c} + A + \frac{l}{c} - \frac{2l}{c} = 2A - \frac{2l}{c} = 2g(A)$  ... doppelte Spannung!

# EINGESCHWUNGENE ZUSTÄNDE



Phasenkoeffizient:  $\beta = \frac{\omega}{c}$   
 $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$

$$\underline{U}(x) = \frac{\underline{Z}_A \cos[\beta(l-x)] + j \underline{Z}_w \sin[\beta(l-x)]}{\underline{Z}_A \cos(\beta l) + j \underline{Z}_w \sin(\beta l)} \underline{U}(0)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{Z}_w \cos[\beta(l-x)] + j \underline{Z}_A \sin[\beta(l-x)]}{\underline{Z}_A \cos(\beta l) + j \underline{Z}_w \sin(\beta l)} \cdot \frac{U_0}{\underline{Z}_w}$$

bei offenem Ausgang:  $\underline{Z}_A = \infty$

27.7. Spannung am Leiterausgang

kann wegen  $\underline{Z}_A = \infty$  im ~~den~~ vernachlässigen und  $\underline{Z}_A$  kürzen

$$x=l: \underline{U}_x = \underline{U}_0$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{c_0}{f} = 60 \text{ m}$$

$$\underline{U}(l) = \frac{U_0}{\cos(\beta l)} = \frac{U_0}{|\cos \frac{2\pi l}{\lambda}|} = 4 \text{ V}_{\text{eff}} \rightarrow \text{doppelte Eingangsspannung}$$

27.8. Eingangsimpedanz  $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad l = \frac{\lambda}{4}, \quad \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} = \underline{Z}_{\text{in}} = \underline{Z}_w \cdot \frac{\underline{Z}_A \overset{0}{\cos(\beta l)} + j \underline{Z}_w \overset{1}{\sin(\beta l)}}{\underline{Z}_w \cos(\beta l) + j \underline{Z}_A \sin(\beta l)} = \underline{Z}_w \frac{j \underline{Z}_w}{j \underline{Z}_A} = \frac{\underline{Z}_w^2}{\underline{Z}_A} = \underline{Z}_{\text{in}}$$

## ERGÄNZUNG ZU LEISTUNGSGRÖßEN IN 3-PHASENSYSTEMEN

$$\underline{S} = 3 \cdot \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = \sqrt{3} \cdot e^{-j \frac{\pi}{6}} \cdot \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_1^*$$

$$S = 3 U_1 I_1$$

$$P = 3 U_1 I_1 \cos \varphi$$

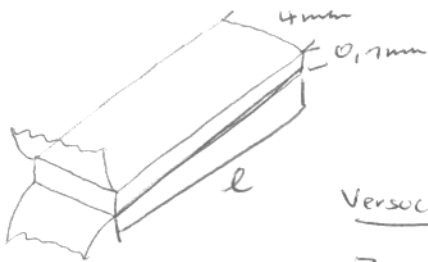
$$Q = 3 U_1 I_1 \sin \varphi$$

gesuchte Leistung = 3 x Stromgleichung

um  $\frac{\pi}{6}$  phasen verschoben



## 27.9. Leitungsstück als Resonanzelement



$$f_0 = 1 \text{ GHz}$$

$$g_{01} = l \text{ wenn offen}$$

$\rightarrow \underline{Z}_{in} = 0 \rightarrow$  Imaginärteil soll ~~sein~~ Nullstelle haben  
 $\rightarrow$  dann habe ich Reihenresonanz

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Versuch 1:  $\underline{Z}_A = 0$

$$\underline{Z}_{in} = Z_w \cdot \frac{j Z_w \sin \beta l}{Z_w \cos \beta l} = j Z_w \tan(\beta l) = j Z_w \tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)$$

soll 0 sein:

~~$$\tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) = 0$$~~

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot l = \pi$$

$$\underline{l = \frac{\lambda}{2} \dots 1. \text{ Nullstelle}}$$

Versuch 2:  $\underline{Z}_A = \infty$ , Ausgang offen

$$\underline{Z}_{in} = Z_w \frac{\cos \beta l}{j \sin \beta l} = -j Z_w \cotan(\beta l)$$

$$\cot = 0 \text{ bei } \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow l = \frac{\lambda}{4} \dots 2. \text{ Nullstelle}$$

$\Rightarrow$  Element wird kürzer wenn Eingang offen:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{f \cdot \sqrt{\epsilon_r}} = 0,178 \text{ m} \quad \Rightarrow l = \frac{\lambda}{4} = 45 \text{ mm}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \sqrt{\epsilon_r \mu_r}}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$